Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
8 класс (Азия)

▷ **1.** В новой серии Смешариков герои Бараш, Лосяш и Копатыч участвовали в интеллектуальной игре "Сообрази". Каждому была предложена коробка, в которой 120 спичек. Каждому нужно сложить из всех спичек (ломать их нельзя) прямоугольный треугольник. Все решили эту задачу, но оказалось, что у Лосяша получился самый большой по площади треугольник, а у Копатыча — самый маленький. Какой треугольник построил Бараш, если он оказался отличным от треугольников, построенных его друзьями?

Решение: Решение:
$3^2+4^2=5^2$, $3+4+5=12$
$5^2+12^2=13^2$, $5+12+13=30$
$8^2+15^2=17^2$, $8+15+17=40$
НОК(12,30,40)=120
$120=(3+4+5)\cdot 10=30+40+50, S=600$
$120=(5+12+13)\cdot 4=20+48+52, S=480$
$120=(8+15+17)\cdot 3=24+45+51, S=540$
Ответ: Бараш построил треугольник со сторонами 24,45,51

▷ **2.** Пусть $S(n)$ - сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа, что
а) $n-S(n)=2024$,
б) $n-S(n)=2025$?

Решение:
n и $S(n)$ имеют один и тот же остаток при делении на 9
$n=\overline{a_1a_2\dots a_k}=a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\dots+a_{k-1}\cdot 10+a_k=a_1(9+1)^(k-1)+a_2(9+1)^(k-2)+\dots+a_{k-1}(9+1)+a_k=9N+(a_1+a_2+\dots+a_k)=9N+S(n)$

$n-S(n)\vdots 9$

а) $2024=924\cdot 9+8, 2024 не \vdots 9 \Rightarrow$ не существует таких n, чтобы выполнить уравнение a;
б) $n=2034, S(n)=9, 2034-9=2025$.

▷ **3.** Дан прямоугольный бильярд размерами 2024×2025. Из точки, находящейся на борту длиной 2025, на расстоянии 100 от угла, выпущен шар под углом 45° к борту. Доказать, что после некоторого числа отражений от бортов шар попадёт в угол бильярда. Найти длину пути, пройденного при этом шаром.

Решение:
Рассмотрим прямую $y=x+100$ или прямую $y=-x+100$. Начало движения — точка (0;100). Движение в области $x\geqslant 0$. Условие прохождения через узел сети в первом случае будет $2025n=100+2024m$, $m>0$. При $m=0$ остаток от деления числа $100+2024m$ на 2025 равен 100. При увеличении m на 1 остаток будет уменьшаться на 1. Первый раз остаток будет равен 0 при $m=100$. Длина траектории в этом случае $202400\sqrt{2}$. Во втором случае условие имеет вид $2025n=100-2024m$, решением в этом случае будет $m=1925, n=-1924$. Длина траектории в этом случае будет равна $2024\cdot 1925\sqrt{2}$.
Ответ: $2024\cdot 1925\sqrt{2}$.

▷ **4.** Дан угол величиной 54°. Пользуясь циркулем и линейкой, разделить его на 3 равные части. Можно ли это сделать одним циркулем?

Решение: Строим окружность с центром O в вершине угла; точки пересечения окружности со сторонами угла A и B (дуга $AB=54°$). От точки A откладываем дугу AC (содержащую AB) величиной 60°; $\angle BOC=6°$. От B отложим три дуги BC.

▷ **5.** Часы пробили полночь. Сколько градусов составляет угол между часовой и минутной стрелкой через 20240 секунды?

Решение:
20240 секунд = 5 часов 37 минут 20 секунд = 5 часов + 113/3

$$360/12=30°/\text{час}=0,5°/\text{мин}=5/600°/\text{сек}=1/120°/\text{сек}$$

$$\alpha=20240\cdot 1/120°=168\frac{2}{3}^{\circ}$$

$$360/60=6°/\text{мин}=1/10°/\text{сек}$$

$$\beta=20240\cdot 1/10°=2024°=5*360+224°$$

$224-168\frac{2}{3}=55,(3)$.
Ответ: 55,(3).

▷ **6.** При подготовке к экзамену три школьника решали 150 задач. Каждый решил 80 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше — лёгких или трудных? На сколько?

Решение:

Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_i количество задач, решённых только j-м учеником, через a_{ij} - количество задач, решённых только i-м и j-м учениками, через a_{123} - количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач - $a_1 + a_2 + a_3$, лёгких - a_{123}. Нас интересует величина $s = a_1 + a_2 + a_3 - a_{123}$. Согласно условию, имеем систему: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 150 \\ a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{123} = 80 \\ a_2 + a_{23} + a_{23} + a_{123} = 80 \\ a_3 + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 80. \end{cases}$

Сложив почленно три последние равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1 - a_2 - a_3 + a_{123} = 240 - 300 = -60$, откуда $s = 60$. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 60.

Ответ: 60.

▷ **7.** Все нечетные числа выписываются подряд: 13579111315... Какая цифра стоит на 2024 месте?

Решение:

Однозначных нечетных чисел в десятке 5, двухзначных в каждом десятке 5, всего $9 \cdot 5 = 45$. Трехзначных в каждой сотне 50, всего $9 \cdot 50 = 450$. Всего цифр в нечетных числах, не превышающих 1000, $5 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 450 = 1445$. Для четырехзначных чисел остается $2024 - 1445 = 579 = 4 \cdot 144 + 3$. 145 четырехзначное нечетное число 1289. на третьей позиции цифра 8.

Ответ: 8.

▷ **8.** В прямоугольном треугольнике длины медиан, проведенных к катетам, равны 19 и 22. Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

Решение: Обозначим $a = BC, b = AC, c = AB$. Пусть $AN = 19, BM = 22$. Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам MBC и ANC, получаем

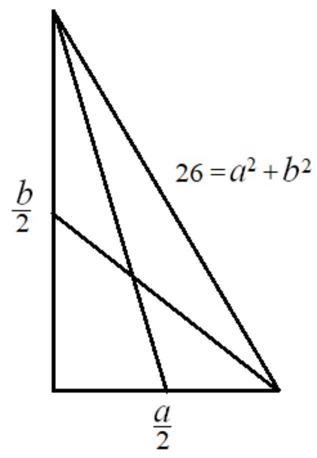
$$a^2 + \frac{b^2}{4} = AN^2 = 19^2 = 361,$$

$$b^2 + \frac{a^2}{4} = BM^2 = 22^2 = 484.$$

Складывая эти равенства, получим $\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 = 845 = 5 \cdot 169$. Отсюда

$$a^2 + b^2 = 4 \cdot 169.$$

Поэтому искомая гипотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 \cdot 169} = 2 \cdot 13 = 26$.



▷ **9.** В 28-значное число 3*4*1*0*8*2*40923*0*320*2*56 случайным образом вместо звездочек записываются цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Какова вероятность, что полученное число будет делиться на 396?

Решение:

Для того чтобы число делилось на 396, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, 9 и 11. поскольку число оканчивается на 56, оно делится на 4. Сумма цифр числа равна 99, поэтому оно делится на 9. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах равна 44, на четных 55, их разность делится на 11. Т.е. всегда делится на 11. Достоверное событие.

Ответ: 1.

▷ **10.** Найдите семь целых, попарно различных, отличных от нуля чисел, сумма кубов которых равнялась бы $10g$ ($g = 10^{100}$).

Решение: $7 \cdot 10^{33}; -6 \cdot 10^{33}; -5 \cdot 10^{33}; 4 \cdot 10^{33}; 3 \cdot 10^{33}; 2 \cdot 10^{33}; -10^{33}$.
$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 + n_7^3 = 100 \cdot (10^{33})^3$
$n_k = d_k : 10^{33}$
$d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 + d_4^3 + d_5^3 + d_6^3 + d_7^3 = 100$
$d_1 = 7, d_2 = -6, d_3 = -5, d_4 = 4, d_5 = 3, d_6 = 2, d_7 = -1.$